Corso di Laurea in Fisica, Analisi (Canale D-K) 20-21
Prof. Galise
Esercitazione 6

Esercizio 1 Siano $f : X \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : X \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ed X non limitato superiormente. Dimostrare o confutare con un controesempio le seguenti affermazioni:

- se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\inf_{x\in X} g(x) > -\infty$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = +\infty$;
- se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ e $\inf_{x\in X} g(x) > -\infty$ allora $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) + g(x)$;
- se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\sup_{x\in X} g(x) < +\infty$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{g(x)} = 0$.

Esercizio 2 Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to1} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{x\to-\infty} (2+\sin x)x = -\infty$$

Esercizio 3 Calcolare (usando i limiti notevoli ed i teoremi sui limiti), o stabilire se non esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(4x)}{3x}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos(3x)}{(\sin x)^2}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x\sqrt{|x|}}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to0} \Big(\tan x\Big)^2\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big),$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x^2)}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\sqrt{x}}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1+x^2)}{1+4^x}, \qquad \lim_{x\to0} H(x)(\sin x + \cos x),$$

dove definiamo

$$H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Esercizio 4 Calcolare (usando i limiti notevoli ed i teoremi sui limiti), se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\right)^x, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\arcsin^2(x)}{\log(1+\sin(x))}\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to0} \frac{2^{\log^2(1+x)}-2^x}{\tan(x)}, \qquad \lim_{x\to3} \frac{3^x-x^3}{x-3}$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{(\arcsin x - \frac{\pi}{2})^2}{\sqrt{x}-1}, \qquad \lim_{x\to2} \frac{\log x - \log 2}{e^x - e^2}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^4+e^x+1)}{\log(x)+\sin(x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{\log^2 x} - \sqrt[3]{\log^2 x + 3}\right)\log x, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{\sin(x^2)}+1-\cos(\sqrt{e^x-1})}{\sin^2(x)+\sqrt{|x|}}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x\arctan^2(\sqrt{5^{2x}-1}) + \big((1-\cos x)\sin^2 x\big)^2}{\tan^3(\arcsin x) + \Big(1-\sqrt[5]{(1+\tan^2 x)^4}\Big)\log(1+3x)} + \left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{x^4-x^2}{x^3+\pi}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin^3\left(\sqrt[3]{1+x^{\frac{2}{3}}}-1\right)+\arctan(2^{x^2}-1)}{\arcsin^4(\sqrt{x})+3^{x^3}-1}\left(\sqrt{\frac{1+\tan(x)+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$$

Esercizio 5 Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità delle funzioni

$$\sqrt{x^3-x^2}, \qquad x\,\mathrm{segno}(\cos x), \qquad \sin(2\pi\mathrm{segno}(x)), \qquad \sqrt{1-2\cos x},$$

dove

$$\mathrm{segno}(x) := \begin{cases} x/|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6 In ciascuno dei casi seguenti, dire se è possibile determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la corrispondente funzione sia continua in $x = 0$

$$f(x) := \begin{cases} 2x + x^2 + 6 & x < 0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} \cos(e^{-1/x^2}) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}, \quad h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 7 Sia $f(x)$ una funzione definita in $\mathbb{R}$.

1. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ se e solo se $\lim_{x \to (-x_0)^+} f(-x) = +\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \neq 0$ allora $\lim_{x \to 0} f(1/x) = \frac{1}{l}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. se $\lim_{x \to 0} f(x) = l \neq 0$ allora $\lim_{x \to +\infty} f(1/x) = \frac{1}{l}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. se $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste allora $\lim_{x \to +\infty} f(1/x)$ non esiste $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 8 La funzione parte frazionaria, denotata con $\mathrm{frac}(x)$, è definita per ogni $x \geq 0$ dalla formula

$$\mathrm{frac}(x) = x - [x]$$

dove

$$[x] = \max\{z \in \mathbb{N} \mid z \leq x\}$$

1. la funzione parte frazionaria è limitata $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. la funzione parte frazionaria è monotona $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. se x_n è una successione crescente allora $\mathrm{frac}(x_n)$ ammette limite $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\lim_{x \to +\infty} [x] + \mathrm{frac}(x)$ esiste $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$